Concours des 21, 22 et 23 mai 1990 d'admission en 1ère année à l'INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS

MATHEMATIQUES (Option M)

$\mathbb{R}$ désigne le corps des réels. n est un entier naturel donné, $n \geq 2$.
$\mathcal{M}_n$ désigne l'algèbre des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients réels et $\mathcal{GL}_n$ le groupe des matrices carrées inversibles d'ordre n ; I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n$.
Pour $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, on définit l'élément $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}_n$ comme étant la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne valant 1.
On appelle matrice de transvection toute matrice du type $(I_n + \lambda E_{i,j})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $i \neq j$.

PARTIE I

1°) a) Calculer les produits matriciels : $E_{i,j} E_{h,k}$, pour $(i,j,h,k) \in \{1,\dots,n\}^4$.

b) Que peut-on dire de la famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$?

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $i, j \in \{1,\dots,n\}$, $i \neq j$; calculer $\det(I_n + \lambda E_{i,j})$.

d) Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $i, j, h, k \in \{1,\dots,n\}$, $i \neq j$, $h \neq k$, $j \neq h$.
Calculer $(I_n + \lambda E_{i,j})(I_n + \mu E_{h,k})$. En déduire l'inverse de $(I_n + \lambda E_{i,j})$.

2°) Soit $A \in \mathcal{M}_n$.
a) Montrer que l'addition à une ligne de A d'un vecteur proportionnel à une autre ligne peut se faire en multipliant A à gauche par une matrice de transvection.

b) Etablir un résultat analogue sur les colonnes.

3°) Soit $A \in \mathcal{M}_n$, une matrice de coefficients $a_{i,j}$. On suppose de plus que la première ligne de A ou la première colonne de A possède un élément non nul.
Montrer qu'il existe deux matrices P et Q de $\mathcal{M}_n$, produits de matrices de transvection, telle que la matrice $B = PAQ$ soit une matrice de coefficients $b_{i,j}$ telle que $b_{1,1} = 1$ et $b_{i,1} = b_{1,i} = 0$, pour $2 \leq i \leq n$.
[Ind.: on pourra envisager successivement les cas suivants: i) $a_{1,1} = 1$; ii) $\exists i>1$ tel que $a_{i,1} \neq 0$ ou $a_{1,i} \neq 0$; iii) $a_{1,1} \neq 1$ et $\forall i>1$ $a_{i,1} = 0$ et $a_{1,i} = 0$]

4°) Soit $A \in \mathcal{M}_n$ et r le rang de A. On suppose $r > 0$.
Montrer qu'il existe deux matrices P et Q de $\mathcal{M}_n$, produits de matrices de transvection, telles que la matrice $B = PAQ$ soit une matrice diagonale de coefficients $b_{i,j}$ telle que :
i) $b_{i,i} = 1$ pour $1 \leq i < r$
ii) $b_{i,i} = 0$ pour $r < i \leq n$
iii) $b_{r,r} = d$, avec ($d = 1$ si $r < n$) et ($d = \det(A)$ si $r = n$).
[Ind.: faire une démonstration par récurrence sur n, en commençant par envisager le cas $n = 2$]

5°) Montrer que le groupe des matrices carrées d'ordre n à déterminant égal à 1, est engendré par les matrices de transvection.

6°) On suppose dans cette question uniquement que $n \geq 3$. Soit f une application de $\mathcal{M}_n$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
i) $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n^2$ $f(AB) = f(A)\,f(B)$
ii) Pour toute matrice diagonale A, f(A) est égal au produit des coefficients de la diagonale.

a) Montrer que toute matrice $(I_n + aE_{\alpha,\beta})$, $\alpha \neq \beta$, peut s'écrire sous la forme :
$$(I_n + aE_{\alpha,\beta}) = (I_n + \lambda E_{i,j})(I_n + \mu E_{h,k})(I_n + \lambda E_{i,j})^{-1}(I_n + \mu E_{h,k})^{-1}$$
expression dans laquelle on précisera des valeurs de λ, μ, i, j, h et k, $i \neq j$ et $h \neq k$.

b) Calculer f(A) si A est une matrice de transvection.

c) Calculer f(A) si A est un élément quelconque de $\mathcal{M}_n$.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

PARTIE II

Si $M \in \mathcal{M}_n$, on note Tr(M), la trace de la matrice M, la somme des éléments de la diagonale de la matrice M.

1°) Vérifier que $M \to \mathrm{Tr}(M)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n$ telle que : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n^2 \quad \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

2°) Soit σ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n$ telle que : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n^2 \quad \sigma(AB) = \sigma(BA)$.

a) Soit $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, $i \neq j$, calculer $\sigma(E_{i,j})$.

b) Comparer $\sigma(E_{i,i})$ et $\sigma(E_{j,j})$, pour $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$.

c) En déduire que : $\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall M \in \mathcal{M}_n \quad \sigma(M) = \lambda \, \mathrm{Tr}(M)$.

3°) Soit $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ engendré par les matrices de la forme $AB-BA$, $(A,B) \in \mathcal{M}_n^2$ et $\mathcal{H} = \{\lambda I_n \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Démontrer que : $\dim \mathcal{T} = n^2 - 1$. En déduire que : $\mathcal{M}_n = \mathcal{T} \oplus \mathcal{H}$

4°) Pour $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ on pose $F_{i,j} = I_n + E_{i,j}$.

Calculer pour $(i,j,h,k) \in \{1,\dots,n\}^4$, $h \neq k$, le produit matriciel : $F_{h,k}^{-1} F_{i,j} F_{h,k}$.

5°) Soit θ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n$ telle que : $\forall A \in \mathcal{M}_n \quad \forall B \in \mathcal{GL}_n \quad \theta(AB) = \theta(BA)$.

Démontrer que : $\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall M \in \mathcal{M}_n \quad \theta(M) = \lambda \, \mathrm{Tr}(M)$.

PARTIE III

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n, $n \geq 2$. E^* désigne le dual de E.
$(e_1,\dots,e_n)$ désigne une base de E et $(e_1^*,\dots,e_n^*)$ la base duale associée.
$\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E, $\mathcal{GL}(E)$ le groupe des automorphismes de E.
Id désigne l'endomorphisme identité de E.
On appelle automorphisme d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$ toute application A, linéaire bijective de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même qui de plus vérifie : $\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2 \quad A(u \circ v) = A(u) \circ A(v)$.
On note $\mathcal{A}ut(E)$ l'ensemble des automorphismes d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$; $\mathcal{A}ut(E)$ est un groupe pour la composition des applications.
Soit g un élément de $\mathcal{GL}(E)$, on définit l'application A_g de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même par :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E) \quad A_g(u) = g \circ u \circ g^{-1}.$$

A_g s'appelle l'automorphisme intérieur défini par g.

1°) Montrer que l'application $\chi : g \to A_g$ est un homomorphisme du groupe $\mathcal{GL}(E)$ dans $\mathcal{A}ut(E)$.
Cette application χ est-elle injective ?

2°) a) Soit g un élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x \in E \quad \{x, g(x)\}$ est une famille liée.

Démontrer que : $\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad g = \lambda \mathrm{Id}$.

b) En déduire le noyau de l'homomorphisme χ.

3°) Pour $(\varphi,x) \in E^* \times E$, on définit une application $u_{\varphi,x}$ de E dans lui-même par : $\forall y \in E \quad u_{\varphi,x}(y) = \varphi(y)\, x$.

a) Vérifier que $u_{\varphi,x}$ est un endomorphisme de E. Préciser son image et son noyau.

b) A quelle condition nécessaire et suffisante sur (φ,x), $u_{\varphi,x}$ est-il un projecteur non nul ?

4°) Dans la suite, pour $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, on notera $u_{i,j}$ l'application $u_{e_j^*, e_i}$.

a) Pour $(i,j,h,k) \in \{1,\dots,n\}^4$, calculer $u_{i,j} \circ u_{h,k}$.

b) Que peut-on dire de la famille $(u_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$?

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

5°) Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des projecteurs non nuls de E.

a) Démontrer que la relation $\leq$ définie sur $\mathcal{P}$ par :

$$\forall (p,q) \in \mathcal{P}^2 \quad (p \leq q) \iff (p = p \circ q = q \circ p)$$

est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}$. Est-ce une relation d'ordre totale ?

b) On appelle élément minimal de $\mathcal{P}$ pour la relation $\leq$, tout élément p de $\mathcal{P}$ tel que :

$$\forall q \in \mathcal{P} \quad q \leq p \Rightarrow q = p$$

Etablir l'équivalence des énoncés suivants :

i) p est un projecteur de rang 1
ii) p est un élément minimal de $\mathcal{P}$ pour la relation $\leq$
iii) $\exists (\varphi, x) \in E^* \times E$ tel que : $p = u_{\varphi,x}$ et $\varphi(x) = 1$.

6°) Soit A un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.

a) Que peut-on dire de A(p) si p est un élément de $\mathcal{P}$?

b) Que peut-on dire de A(p) si p est un élément minimal de $\mathcal{P}$ pour la relation $\leq$?

c) En déduire qu'il existe une famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de vecteurs de E, et une famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de formes linéaires sur E, telles que :

i) $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \varphi_i(\varepsilon_i) = 1$;
ii) $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad A(u_{i,i}) = u_{\varphi_i, \varepsilon_i}$.

d) Calculer $\varphi_i(\varepsilon_j)$ pour $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$.
Que peut-on en déduire pour les familles $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$?

7°) Soit $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$.

a) Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, $k \neq j$, calculer : $A(u_{i,j}) \circ u_{\varphi_k, \varepsilon_k}$.
En déduire le rang et le noyau de $A(u_{i,j})$.

b) Calculer : $A(u_{i,j}) \circ A(u_{j,i})$. En déduire l'image de $A(u_{i,j})$.

c) Montrer qu'il existe un réel non nul $\lambda_{i,j}$ tel que : $A(u_{i,j}) = \lambda_{i,j}\, u_{\varphi_j, \varepsilon_i}$.

8°)a) Montrer que : $\forall (i,j,k) \in \{1, \dots, n\}^3 \quad \lambda_{i,j}\, \lambda_{j,k} = \lambda_{i,k}$.

b) En déduire que : $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2 \; \lambda_{i,j} = \dfrac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{j,1}}$.

9°)a) Montrer qu'il existe une base $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de E, dont la base duale est notée $(\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)$ telle que : $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2 \quad A(u_{i,j}) = u_{\alpha_j^*, \alpha_i}$.

b) En déduire qu'il existe un élément g de $\mathcal{GL}(E)$ tel que :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2 \quad A(u_{i,j}) = g \circ u_{i,j} \circ g^{-1}.$$

c) Conclure.

10°) Quelles sont toutes les formes linéaires φ sur $\mathcal{L}(E)$ telles que pour tout A, automorphisme d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$, on ait : $\forall u \in \mathcal{L}(E) \quad \varphi(A(u)) = \varphi(u)$?

* * * * *